MATHEMATIQUES 1ère EPREUVE

Voie Générale

Durée 4 H - Coefficient 4

Problème

I] Soit $f_n(x) = \dfrac{x^n}{\sqrt{1-x}}$ $\quad (n \in \mathbb{N})$

1°) Etudier le variations de $f_n(x)$.
2°) Tracer dans un même repère les graphes correspondant à n = 0,1,2,3.
3°) Etudier le comportement de $f_n(x)$ sur $[0,1[$ quand n tend vers + ∞.

II] On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x}}$

1°) Expliquer la convergence de I_n.

2°) Etudier la suite (I_n), $n \geqslant 0$.

3°) On se propose de démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

On fixe alors un réel α compris entre 0 et 1 tel que :

$$I_n = \int_0^\alpha \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x}} + \int_\alpha^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x}}$$

Démontrer :

a) $\quad 0 \leqslant \displaystyle\int_0^\alpha \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x}} \leqslant 2.\alpha^n$

b) $\quad 0 \leqslant \displaystyle\int_\alpha^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x}} \leqslant 2.\sqrt{1-\alpha}$

Comment peut-on choisir α pour que $0 < 2.\sqrt{1-\alpha} < \dfrac{\epsilon}{2}$

(ϵ étant un nombre réel positif donné)?

Que pensez-vous de la première majoration?
En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

A SUIVRE

III]On cherche maintenant un équivalent de I_n quand n tend vers +OO.

1°) Démontrer que $I_n - I_{n-1} = -\int_0^1 x^{n-1}.\sqrt{1-x}\,dx$

puis que $I_n = \frac{2n}{2n+1}.I_{n-1}$.

En déduire les valeurs I_0, I_1, I_2, I_3.

2°) Calculer explicitement I_n sous la forme d'un quotient, le résultat ne devant faire intervenir que des factorielles et des puissances de 2.

3°) Le symbole ln désignant le logarithme népérien, démontrer que :

$$\ln(I_n) = -\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2k}\right) + \ln(2).$$

4°) En étudiant la série de terme général $u_k = \ln\left(1+\frac{1}{2k}\right)$,

démontrer que $\lim_{n\to+\infty} \ln(I_n) = -\infty$.

En déduire la limite de I_n.

5°) a) On pose $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.

Que peut-on dire de $\lim_{n\to+\infty} S_n$?

b) On pose $V_n = S_n - \ln(n)$.
Etudier la monotonie de cette suite.(On effectuera un développement limité de $\frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ du second ordre par rapport à $\frac{1}{n}$).

c) Démontrer que $V_n \geq 0$.

[On utilisera $\ln(n) = \int_1^n \frac{dt}{t}$, et on écrira

$$V_n = \left(1 - \int_1^2 \frac{dt}{t}\right) + \left(\frac{1}{2} - \int_2^3 \frac{dt}{t}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \int_{n-1}^n \frac{dt}{t}\right) + \frac{1}{n}\ ].$$

En déduire que l'on peut écrire :

$S_n = \ln(n) + \eta(n) + \gamma$ avec $\lim_{n\to+\infty} \eta(n) = 0$ et $\gamma \in \mathbb{R}^+$

(appelée constante d'Euler).

T.S.V.P.

d) Démontrer que la série de terme général

$w_k = -\ln(1+\frac{1}{2k}) + \frac{1}{2k}$ $(k\geq 1)$ est convergente,

sa somme étant notée W. Que peut-on dire sur W ?

En utilisant la relation :

$$\ln(I_n) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{n} w_k + \ln(2)$$

démontrer que :

$$\ln(I_n) = W_n - \frac{1}{2}\ln(n) + \ln(2) - \frac{\gamma}{2} + \eta_1(n)$$

avec $\lim_{n\to+\infty} \eta_1(n)=0$ et $W_n = \sum_{k=1}^{n} w_k$.

En déduire que $I_n = \frac{1}{\sqrt{n}}.\exp(-\gamma/2 + \ln(2) + W_n + \eta_1(n))$

Montrer qu'il existe une constante $A > 0$

telle que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{A}{\sqrt{n}}$.

IV] 1°) Soit maintenant la série de terme général (I_n).

Que peut-on dire de $\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \int_0^1 \frac{x^k}{\sqrt{1-x}}\,dx\right)$?

2°) a) Ecrire $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} I_k$ sous la forme d'une intégrale.

b) Prouver la convergence de cette intégrale.

c) Démontrer que $\int_0^1 \frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^{3/2}}\,dx \geq \int_0^{1-1/n} \frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^{3/2}}\,dx$ $(n>0)$.

En déduire que : $\int_0^1 \frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^{3/2}}\,dx \geq (1-(1-1/n)^{n+1})(2\sqrt{n}-2)$

3°) Chercher la limite quand n tend vers +∞ de $(1- 1/n)^{n+1}$.

4°) Quelle est alors la limite de $\int_0^1 \frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^{3/2}}\,dx$

quand n tend vers +∞ ?

Quel résultat retrouve-t-on ?

A SUIVRE

EXERCICE D'ALGEBRE

Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & -4 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 3 \\ -6 & -7 & -4 & -15 \end{bmatrix}$

1°) En utilisant l'algorithme de Gauss et les matrices associées aux transformations élémentaires sur les lignes, démontrer qu'il existe une matrice T carrée d'ordre 4 triangulaire supérieure
(C'est à dire $T=(a_{ij})$ $1 \leqslant i \leqslant 4$, $1 \leqslant j \leqslant 4$ et $a_{ij}=0$ si $i>j$)
et une matrice P carrée inversible d'ordre 4

vérifiant : $P.A = T$

2°) En déduire que la matrice A s'écrit sous la forme : $A = S.T$
où S est une matrice carrée d'ordre 4 triangulaire inférieure
(C'est à dire $S=(a'_{ij})$ $1 \leqslant i \leqslant 4$, $1 \leqslant j \leqslant 4$ et $a'_{ij}=0$ si $i<j$).

3°) En déduire que la matrice A s'écrit sous la forme : $A = S.D.S'$
D étant une matrice diagonale, S' étant une matrice triangulaire supérieure n'ayant que des termes égaux à 1 sur la diagonale principale.

4°) Déduire de la méthode précédente la résolution du système :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = \sqrt{2} \\ 4x_1 - 4x_3 + 2x_4 = 2\sqrt{2} \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2\sqrt{2}+\sqrt{7} \\ -6x_1 - 7x_2 - 4x_3 - 15x_4 = \dfrac{\sqrt{13}}{4} \end{cases}$$

(on utilisera deux changements d'inconnues).

FIN